ΦΥΣΙΚΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΑ ΤΡΕΧΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

Η άκρη Ο, μιας χορδής, αρχίζει την t=0, να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: y_o= 0,2ημωt (SI), και κατά μήκος της χορδής διαδίδεται αρμονικό κύμα, προς την θετική κατεύθυνση του άξονα χχ΄. Το σημείο Κ, απέχει από την πηγή Ο, απόσταση χ=3m, και είναι το 2ο κατά σειρά σημείο με το οποίο η πηγή βρίσκεται σε αντίθεση φάσης. Την χρονική στιγμή $t = \frac{7}{4}s$, το σημείο Κ, βρίσκεται για πρώτη φορά στην θέση *y=+0,2m.*

α) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση

β) Να βρεθούν πόσα σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή την t=3,5s.

γ) Τη χρονική στιγμή t=3,5s, βρείτε πόσα σημεία της χορδής βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τους (ενώ έχουν μπει σε ταλάντωση).

δ) Κάθε φορά που το Ο, βρίσκεται στην θέση y_o= -Α =-0,2m, να βρείτε την απομάκρυνση y_S, και την φορά κίνησης του σημείου S στην θέση χ_S =3,5 m

ε) Να κατασκευάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την t=1,125s.

Λύση

α) Σε αντίθεση φάσης βρίσκονται τα σημεία που απέχουν απόσταση: ***$\Delta\chi=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$,*** όπου k=0,1,2,...

Το Κ, βρίσκεται σε αντίθεση φάσης με την πηγή Ο (χ=0) , και είναι το δεύτερο κατά σειρά σημείο που συμβαίνει αυτό, άρα k=1.

$$\text{Άρα } \Delta\chi = \chi = 3\frac{\lambda}{2} = 3\text{m}, \quad \text{άρα } \boldsymbol{\lambda=2m.}$$

Την χρονική στιγμή t=7/4s, το Κ, βρίσκεται για πρώτη φορά στην θέση y =+Α. Αυτό σημαίνει ότι στον χρόνο αυτό:

- ☻το κύμα έχει ταξιδεύσει μέχρι το Κ ($t_1 = \chi_K/\upsilon$)
- ☻το Κ έχει ταλαντωθεί για χρόνο t_2= Τ/4 (όπου Τ: η περίοδος)

Άρα $t = t_1 + t_2 = \frac{\chi}{\upsilon} + \frac{T}{4} = \frac{\chi}{\lambda/T} + \frac{T}{4} = \frac{\chi T}{\lambda} + \frac{T}{4}$ ή $\frac{7}{4} = \frac{3T}{2} + \frac{T}{4}$ (SI), από όπου: ***T=1s.***

$$\textit{Τελικά:}\quad y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi\chi}{\lambda}\right) = 0{,}2\eta\mu(2\pi t - \pi\chi) \quad \text{(SI)}$$

β) $\upsilon = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$ = 2m/s

Την t=3,5s, το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι την θέση: χ_{max}=υt = 7m

Σε συμφωνία φάσης με Ο (χ=0) , βρίσκονται τα σημεία για τα οποία ισχύει: $\boldsymbol{\Delta\chi = \chi = k\lambda}$ = 2k (*χ: m, k=1,2,3,…)*

Όμως : $0 < \chi \le 7$m. *Άρα* $0 < 2k \le 7$ ή $0 < k \le 3{,}5$

Άρα: k = 1, 2, 3 : ***Σύνολο 3 σημεία***

γ) Η εξίσωση του κύματος κατά μήκος της χορδής είναι:

$$y = 0{,}2\eta\mu(2\pi t - \pi\chi) \quad \text{(SI)}$$

Την t=3,5s: y = 0,2 ημ(7π – πχ) (SI)

Για y=0: 0=0,2 ημ(7π – πχ) ή ημ(7π-πχ) =0 ή 7π-πχ= kπ ή

χ=7-k (SI)

Όμως $0 \le \chi \le 7$ ή $0 \le 7-k \le 7$ ή $-7 \le -k \le 0$ ή $7 \ge k \ge 0$

ή k=0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: ***Σύνολο 8 σημεία***

δ) Η εξίσωση του κύματος μπορεί να γραφεί και ως εξής:

y = Α ημφ (φ: η φάση του κύματος)

Άρα για το Ο: $y_o = A\,\eta\mu\varphi_o$

Θέτω $y_o = -A$: $-A = A\,\eta\mu\varphi_o$ ή $\eta\mu\varphi_o = -1$ ή

$$\phi_O = (2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2})$$

Η ***Διαφορά φάσης*** Ο και S, είναι :

$$\Delta\phi_{o,S} = \phi_o - \phi_S = \frac{2\pi \cdot \Delta\chi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot \chi_\Sigma}{\lambda} = \frac{7\pi}{2} \qquad (\varphi_S < \varphi_o)$$

Αυτό σημαίνει ότι όποτε η φάση του Ο είναι $\varphi_o = (2\kappa\pi + 3\pi/2)$, η φάση του S, θα είναι $\varphi_S = \varphi_o - 7\pi/2 = 2\kappa\pi + 3\pi/2 - 7\pi/2 = 2\kappa\pi - 2\pi$

☻Για την <u>*απομάκρυνση*</u> του S:

$$y_S = A\,\eta\mu\varphi_s = A\,\eta\mu(2\kappa\pi - 2\pi) = A\eta\mu 0 = 0$$

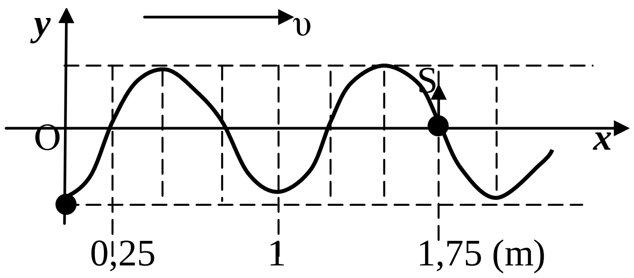
☻Για την <u>*ταχύτητα*</u> του *S:*

$$V_S = \omega A\,\sigma\upsilon\nu\varphi_S = \omega A\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi - 2\pi) = \omega A\sigma\upsilon\nu 0 = \omega A > 0$$

Άρα κάθε φορά που το Ο βρίσκεται στο -Α, το S, βρίσκεται στην Θέση ισορροπίας του και κινείται κατά την θετική φορά.

<u>*β΄ τρόπος:*</u>

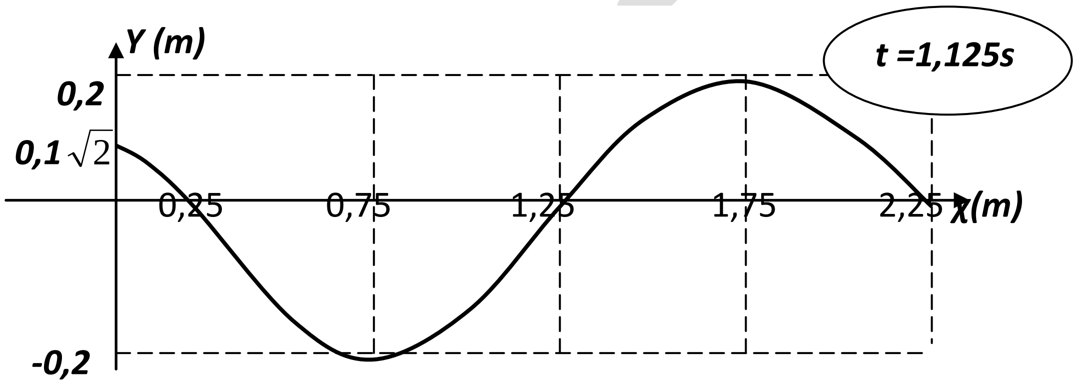
Κατασκευάζω ένα τμήμα του στιγμιοτύπου, μια χρονική στιγμή που το Ο είναι στην θέση ***y=-A***. Λαμβάνοντας υπ΄όψη ότι λ/4 = 0,25m, και χ_S= 1,75m, τοποθετώ στο στιγμιότυπο το S.



Από το στιγμιότυπο είναι προφανές ότι:
Αν $y_o = -A$
τότε:
$y_S = 0$ και $V_S > 0$

ε) *<u>Την t=1,125s</u>*: y= 0,2 ημ(2,25π – πχ) (SI),
$\chi_{max} = \upsilon\, t = 2,25$m άρα
$0 \leq \chi \leq 2,25$m

χ	0	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25
y	$0,1\sqrt{2}$	0	-0,2	0	0,2	0

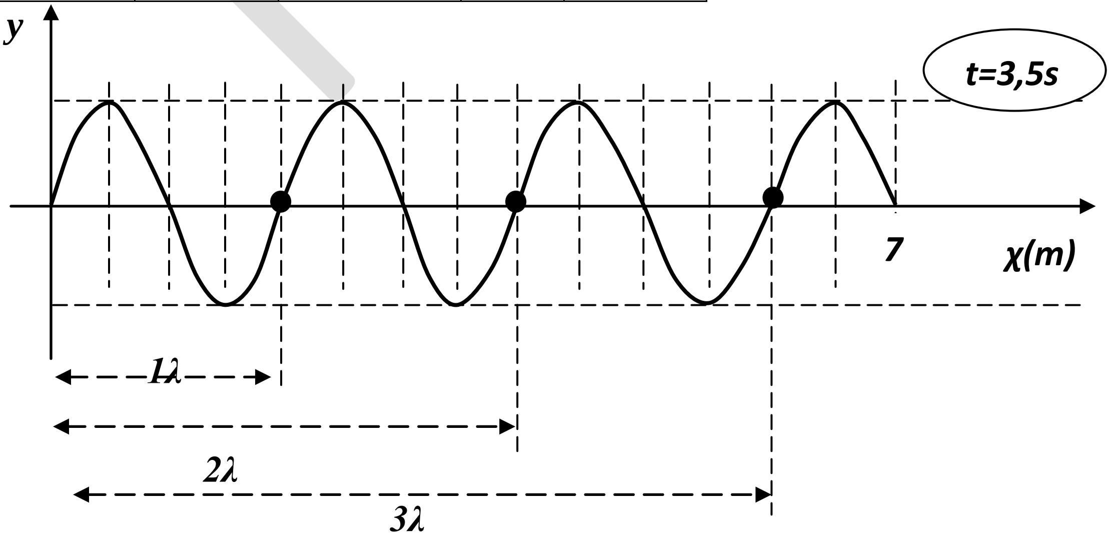


<u>Παρατήρηση:</u>

Τα ερωτήματα (***β)*** και ***(γ),*** θα μπορούσαμε να τα απαντήσουμε και με την βοήθεια του ***στιγμιοτύπου*** του κύματος την ***t=3,5s:***

y = 0,2 ημ(7π – πχ) (SI) με $0 \leq \chi \leq 7$m

χ(m)	0	0,5 (λ/4)	…..	7
y(m)	0	0,2	…..	0



Από το στιγμιότυπο φαίνεται ότι:

☻ Υπάρχουν 3 σημεία (μαύρες τελείες), που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή

☻ Υπάρχουν συνολικά 8 σημεία που βρίσκονται την στιγμή αυτή στις θέσεις ισορροπίας τους (***y=0***)

ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κατά μήκος τεντωμένης χορδής έχει σχηματισθεί στάσιμο κύμα με εξίσωση: $Y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$.

Η χορδή εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x΄Ox, ενώ τα άκρα της $x=\frac{5\lambda}{4}$ και $x=-\frac{5\lambda}{4}$ είναι ακλόνητα στερεωμένα.

Στο μέσον της Ο($x=0$), σχηματίζεται κοιλία.

α) Να κατασκευάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t=\frac{5T}{8}$. Στο στιγμιότυπο να φαίνεται η φορά κίνησης των κοιλιών.

β) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της φάσης των σημείων Σ($\chi=\frac{\lambda}{8}$) και Μ ($\chi=\frac{5\lambda}{8}$) σε συνάρτηση με τον χρόνο σε κοινό διάγραμμα

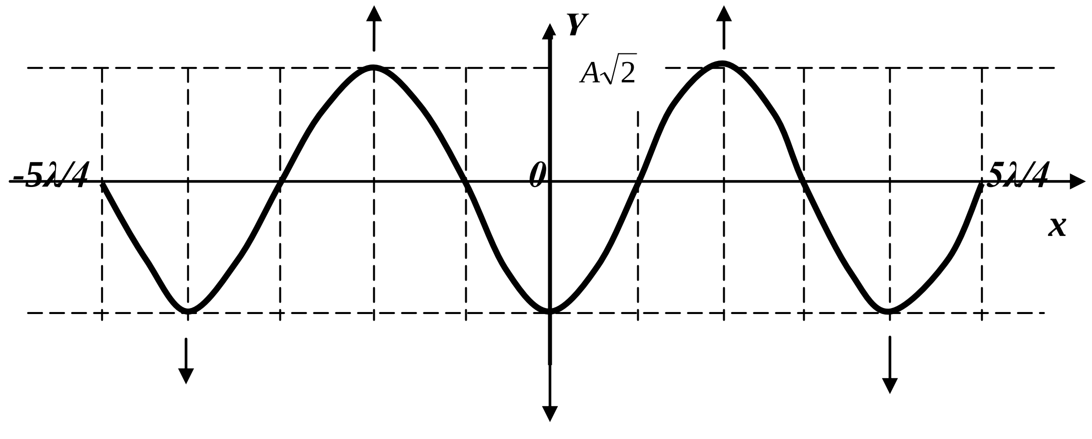
γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της φάσης του στασίμου κύματος σε συνάρτηση με το x, την χρονική στιγμή $t=\frac{5T}{8}$

<u>Λύση:</u>

α) Την $t=\frac{5T}{8}$: $Y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5T}{8}) = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{4} =$

$$= 2\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\chi}{\lambda}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad ή \quad \mathrm{Y} = -A\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$$

x	*-5λ/4*	*-4λ/4*	…………	*0*	………	*4λ/4*	*+5λ/4*
Y	*0*	$-A\sqrt{2}$		$-A\sqrt{2}$		$-A\sqrt{2}$	*0*



<u>*Για την κοιλία στο Ο(χ=0)*</u>: $Y_o = 2A\,ημ\dfrac{2\pi t}{T}$ και $V_o = 2Aω\,συν\dfrac{2\pi t}{T}$

<u>*Την t=5T/8:*</u> $V_o = 2Aω\,συν(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{5T}{8}) = 2A\omega\cdot συν\dfrac{5\pi}{4} < 0$

Το Ο κινείται προς τα κάτω απομακρυνόμενο από την θέση ισορροπίας του. Είναι γνωστό ότι στο στάσιμο κύμα όλα τα σημεία απομακρύνονται ταυτόχρονα (ή πλησιάζουν) την θέση ισορροπίας.

Με αυτό το σκεπτικό, σχεδιάζω στο στιγμιότυπο την φορά κίνησης των κοιλιών.

β)Από την εξίσωση του στασίμου για $χ = λ/8$ και $χ = 5λ/8$:

$$Y_\Sigma = 2Aσυν\frac{2\pi\lambda/8}{\lambda}\cdot ημ\frac{2\pi t}{T} = A\sqrt{2}ημ\frac{2\pi t}{T}$$

και $$Y_M = 2Aσυν\frac{2\pi 5\lambda/8}{\lambda}\cdot ημ\frac{2\pi t}{T} = -A\sqrt{2}ημ\frac{2\pi t}{T} = A\sqrt{2}ημ(\frac{2\pi t}{T}+\pi)$$

Άρα:

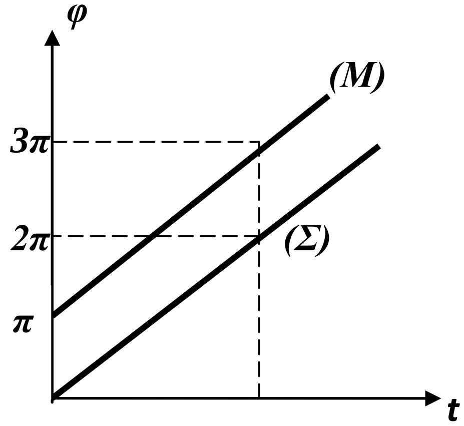
$$\phi_\Sigma = \frac{2\pi t}{T} \quad \text{και} \quad \phi_M = \frac{2\pi t}{T}+\pi$$

<u>*Για t=0:*</u> $\varphi_\Sigma = 0$

και $\varphi_M = \pi$

<u>*Για t=T:*</u> $\varphi_\Sigma = 2\pi$

και $\varphi_M = 3\pi$



γ) *Την* $t = \dfrac{5T}{8}$: $Y = 2Aσυν\dfrac{2\pi x}{\lambda}\cdot ημ(\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{5T}{8}) = 2Aσυν\dfrac{2\pi\chi}{\lambda}\cdot ημ\dfrac{5\pi}{4}$

- ☻ *Αν* $συν\dfrac{2\pi x}{\lambda} > 0$ *:*

$Y = +2A\left|συν\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|\cdot ημ\dfrac{5\pi}{4}$ και η φάση είναι*:* $\phi = \dfrac{5\pi}{4}$

- ☻ *Αν* $συν\dfrac{2\pi x}{\lambda} < 0$ *:*

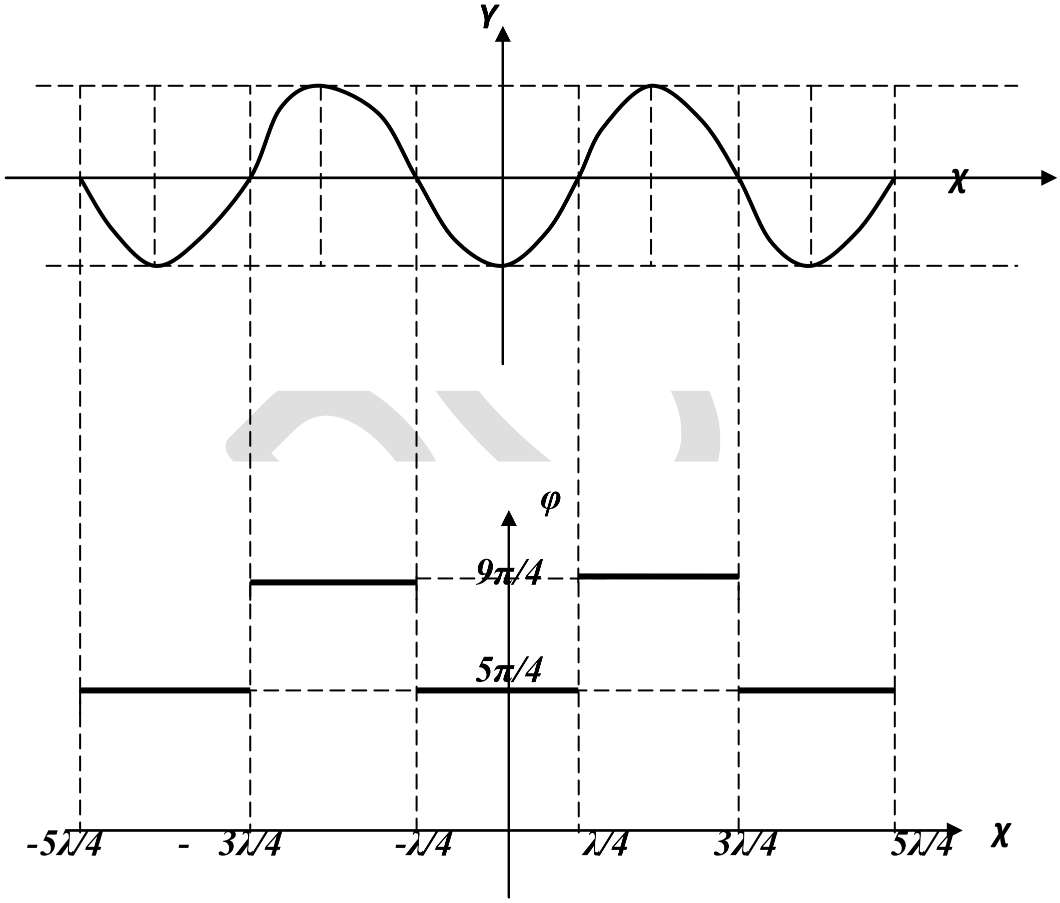
$$Y = -2A\left|συν\frac{2\pi x}{\lambda}\right|\cdot ημ\frac{5\pi}{4} = 2A\left|συν\frac{2\pi x}{\lambda}\right|\cdot ημ(\frac{5\pi}{4}+\pi) = 2A\left|συν\frac{2\pi\chi}{\lambda}\right|\cdot ημ\frac{9\pi}{4}$$

και η φάση είναι*:* $\phi = \dfrac{9\pi}{4}$

<u>*Για το σημείο Ο (χ=0)*</u>: συν $\frac{2\pi x}{\lambda} > 0$ άρα $\varphi_o = \frac{5\pi}{4}$

Είναι γνωστό ότι τα σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν ίδια φάση, ενώ τα σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού έχουν διαφορά φάσης π.

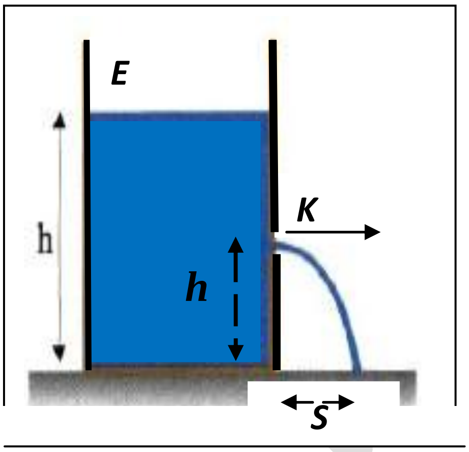
Με την βοήθεια της παραπάνω πρότασης και του στιγμιοτύπου κάνω την γραφική παράσταση της φάσης του στασίμου σε συνάρτηση με το χ, την ***t=5T/8***



ΑΣΚΗΣΗ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ποσότητα νερού είναι αποθηκευμένη σε ανοικτό κυλινδρικό δοχείο.
Το ύψος του νερού στο δοχείο είναι $\boldsymbol{H}$. Το δοχείο έχει μικρή τρύπα (Κ), στο πλευρικό του τοίχωμα και σε απόσταση $\boldsymbol{h_1}$ από το έδαφος.
Να υπολογίσετε:
α)Την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_K}$ με την οποία εκρέει το νερό από την τρύπα.
β) Πόσο απέχει ***(S*** $_1$***),*** από το δοχείο το σημείο του δαπέδου στο οποίο φτάνει η φλέβα του νερού.
γ) Σε ποιο ύψος $\boldsymbol{h_2}$ από τη βάση του δοχείου πρέπει να ανοιχτεί δεύτερη τρύπα στο πλευρικό τοίχωμα ώστε η φλέβα του νερού που θα βγαίνει από αυτή να πέφτει στο ίδιο σημείο με την προηγούμενη.
δ) Σε ποιο ύψος ***h,*** από τη βάση του κυλίνδρου πρέπει να ανοίξουμε τρύπα ώστε η φλέβα του νερού να φτάνει στο δάπεδο στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το δοχείο.
Θεωρήστε γνωστά τα: ***H,*** $\boldsymbol{h_1}$ και ***g,*** αγνοείστε την αντίσταση του αέρα και θεωρήστε ότι η στάθμη κατεβαίνει αρκετά αργά

Λύση



α) Εφαρμόζω τον νόμο του *Bernoulli* για τα σημεία Ε και Κ:

$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g H = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g h \quad (1)$$

όπου:

$p_E = p_K = p_{ατμ}$

$\upsilon_E \approx 0$ (η στάθμη κατεβαίνει πολύ αργά)

<u>(1)</u>: $\cancel{p_E} + \cancel{\frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2} + \rho g H = \cancel{p_K} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g h_1$ από όπου: $\boldsymbol{\upsilon_K = \sqrt{2g(H-h_1)}}$ (2)

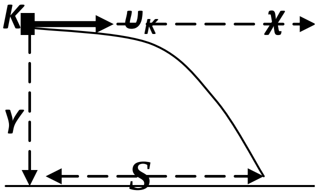
β) Θεωρώ μία στοιχειώδη μάζα νερού ***dm,*** η οποία εξερχόμενη από το σημείο Κ, με ταχύτητα υ_K, εκτελεί οριζόντια βολή:

<u>Εξισώσεις οριζόντιας βολής:</u>

$\upsilon_X = \upsilon_K =$ σταθ. (3)

$\chi = \upsilon_\kappa t$ (4)

$\upsilon_Y = gt$ (5)



<u>Από (6),</u> για $y = h_1$: $t_{ΠΤ} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$

<u>Από (4):</u> $S_1 = \upsilon_K t_{\pi\tau}$ ή

$S = \sqrt{2g(H-h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ ή

$$\boldsymbol{S_1 = 2\sqrt{Hh_1 - h_1^2}}$$

$y=\frac{1}{2}gt^2$ (6)

γ) Έστω h_2 το ύψος στο οποίο θα έπρεπε να ανοιχθεί η δεύτερη τρύπα Κ΄. Τότε όμοια με το (β) ερώτημα, το βεληνεκές θα είναι:

$$S_2 = 2\sqrt{Hh_2 - h_2^2}$$

Πρέπει να ισχύει: $S_1 = S_2$ ή $2\sqrt{Hh_1 - h_1^2} = 2\sqrt{Hh_2 - h_2^{\,2}}$ *ή*

$Hh_1 - h_1^2 = Hh_2 - h_2^2 \Rightarrow h_2^{\,2} - Hh_2 + (Hh_1 - h_1^2) = 0$

Διακρίνουσα: $\Delta = H^2 - 4\cdot 1\cdot (Hh_1 - h_1^2) = H^2 - 4Hh_1 + 4h_1^2 = (H - 2h_1)^2$

άρα: $h_2 = \dfrac{H + H - 2h_1}{2} = H - h_1$ *και* $h_2 = \dfrac{H - H + 2h_1}{2} = h_1$

επομένως $\boldsymbol{h_2 = H - h_1}$

δ) Έστω h, το ζητούμενο ύψος.

Η ταχύτητα εξόδου από το σημείο Κ, θα είναι: $\upsilon_K = \sqrt{2g(H - h)}$

Από την (4) και την (6), προκύπτει η εξίσωση τροχιάς:

(4): $t=\chi/\upsilon_\kappa$ άρα: (6): $y = \dfrac{1}{2} g \dfrac{\chi^2}{\upsilon_K^{\,2}} \Rightarrow y = \dfrac{g\chi^2}{2\upsilon_K^2}$

Για $\boldsymbol{y=h}$, $\boldsymbol{\chi=S}$ και $\upsilon_K = \sqrt{2g(H - h)}$ προκύπτει:

$$h = \frac{gS^2}{4g(H - h)} \Rightarrow h = \frac{S^2}{4H - 4h} \Rightarrow S^2 = 4Hh - 4h^2 \Rightarrow$$

$$4h^2 - 4Hh + S^2 = 0 \quad (7)$$

Για να έχει λύσεις η (7), πρέπει:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 16H^2 - 16S^2 \geq 0 \Rightarrow S \leq H \Rightarrow S_{MAX} = H$ (***το μέγιστο δυνατό βεληνεκές)***

Στην (7) για $S = S_{MAX} = H$: $4h^2 - 4Hh + H^2 = 0$

$\Delta = 16H^2 - 16H^2 = 0$ και

$$h = \frac{4H + 0}{8} = \frac{H}{2}$$